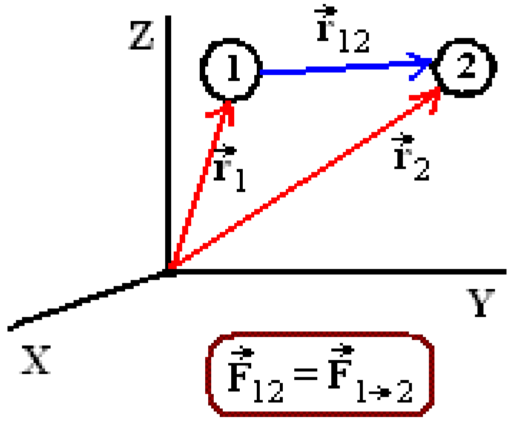
PARTE 2: CAMPO ELÉCTRICO

CAPÍTULO 3: Interacciones entre cargas eléctricas.

3.1 Ley de Coulomb



La fuerza electrostática que ejerce la carga "1" sobre la carga "2" es:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{K q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}}$$

Ley de Coulomb

Donde

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

$\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$

K = cte eléctrica

En el vacío: $K_o = 8.988 * 10^9 \ Nm^2/C^2$

$\simeq 9 * 10^9 \ Nm^2/C^2$

Obviamente: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ **(acción y reacción)**

UNIDADES IMPORTANTES

[q] $\rightarrow$ Coulomb

1 C = $6.25 * 10^{18}$ cargas elementales

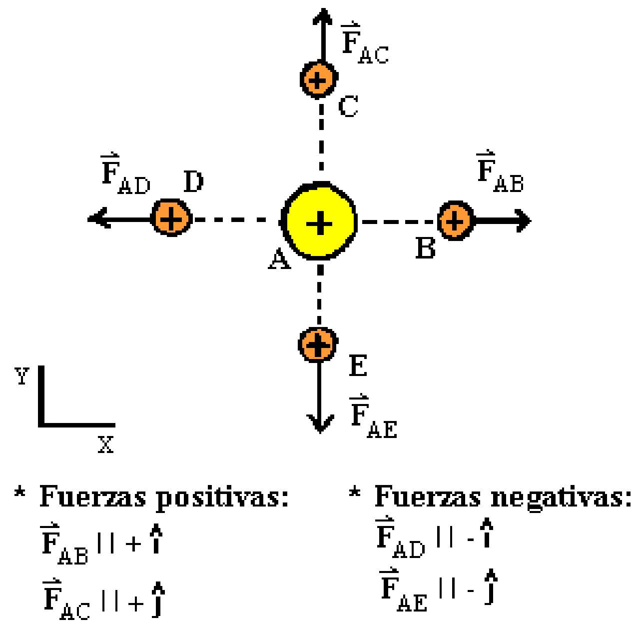
e = carga del protón = - [carga del electrón] = $1.6 * 10^{-19}$ C

K = 1 / (4 π ε) $\rightarrow$ ε = permitividad eléctrica del medio (normalmente el medio es el vacío)

OBSERVACIONES

i) Si las cargas tienen signos opuestos, la fuerza eléctrica será atractiva.

Si las cargas son del mismo signo, la fuerza será repulsiva.
ii) La fuerza generada por una carga positiva puede ser positiva o negativa:



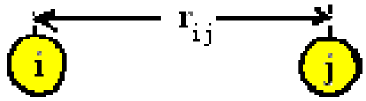
MODELO BÁSICO DEL ÁTOMO (Rutherford - Bohr)
- El átomo corresponde a un núcleo de carga +Ze (Z = número atómico), formado por Z protones (cada uno de carga +e) y una cantidad variable de neutrones (de carga nula).
- Alrededor del núcleo orbitan Z electrones (en un átomo neutro)

PARTÍCULA	SÍMBOLO	CARGA, C	MASA, Kg
Protón	p+	$+1.6*10^{-19}$	$1.673*10^{-27}$
Electrón	e-	$-1.6*10^{-19}$	$9.1095*10^{-31}$
Neutrón	n^{o}	0	$1.675*10^{-27}$

$$r_{\text{átomo}} \sim 10^{-11} - 10^{-10}\ \text{m}$$
$$r_{\text{núcleo}} \sim 10^{-15} - 10^{-14}\ \text{m}$$

NOTA:
Para las partículas subatómicas, la fuerza predominante es la eléctrica. Por ejemplo, para el electrón del átomo de hidrógeno:
$F_{Elec} = 8.2*10^{-8}$ N
$F_{Gravit} = 3.6*10^{-47}$ N

3.2 Energía Potencial Electrostática
3.2.3 Sistema de dos cargas



Para dos cargas q_i y q_j, la Energía Potencial originada por la interacción eléctrica es:

$$U_{ij} = \frac{K q_i q_j}{r_{ij}}$$

3.2.2 Sistema de n cargas
Para tres cargas, y utilizando el resultado anterior, se obtiene:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

O también:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{j} U_{ij}$$

Observemos que la cantidad de términos de la sumatoria es igual al total de combinaciones posibles, disponiendo de n elementos para crear grupos conteniendo dos elementos. Es decir:

$$\text{Cant Térms} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Si n = 3, la sumatoria contendrá tres términos:

$$\text{Cant Térms} = \frac{3!(3-2)!}{2!} = 3$$

3.3 Trabajo Eléctrico
3.3.1 Definición
Sea un sistema aislado formado por las cargas puntuales q_i y q_j. El trabajo necesario para crear el sistema (q_i, q_j,) es igual al trabajo realizado en contra de las fuerzas eléctricas para traer cuasiestáticamente cada carga desde el infinito hasta el lugar correspondiente en el sistema (el resultado es independiente de la trayectoria).
Matemáticamente:

$$W = \int_{\infty}^{P} dr\,(-F_{el}) = \int_{\infty}^{P} dr\,\left(\frac{-K q_i q_j}{r_{ij}^2} \right)$$

$$W = \frac{K q_i q_j}{r_{ij}} = U_{ij}$$

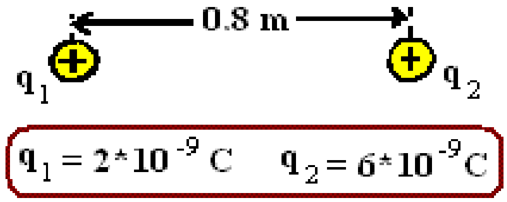
Observemos que si el sistema es aislado:
- Traer la primera carga desde el infinito no requiere trabajo
- Traer la segunda carga desde el infinito implica "luchar" en contra de la interacción eléctrica que percibe la segunda carga debido a la presencia de la primera.

NOTA
$W = q_i$ * [Potencial eléctrico generado por q_j cuando $r = r_{ij}$]
Donde [Potencial eléctrico generado por q_i] = $K q_i / r$
(Más información en el capítulo 5)

EJERCICIOS RESUELTOS

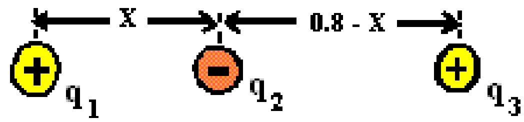
1) Fuerza eléctrica

Dado el siguiente sistema:



¿Dónde debe ubicarse una tercera carga $q_3 = -2*10^{-10}$ C, de modo que la fuerza recibida por q_3 sea nula?

Por análisis vectorial, la carga debe colocarse entre q_1 y q_2 :



$$X = |X| > 0$$

Sólo allí se consigue que las fuerzas sean antiparalelas.

Luego:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{23}|$$

$$\left|\frac{K\, q_1\, q_2}{x^2}\right| = \left|\frac{K\, q_1\, q_2}{(0.8 - x)^2}\right|$$

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(0.8 - x)^2}$$

$$q_1 (0.8 - x)^2 = q_2 x^2$$

$$\frac{1}{2} X^2 + 0.3265\, X - 0.1306 = 0$$

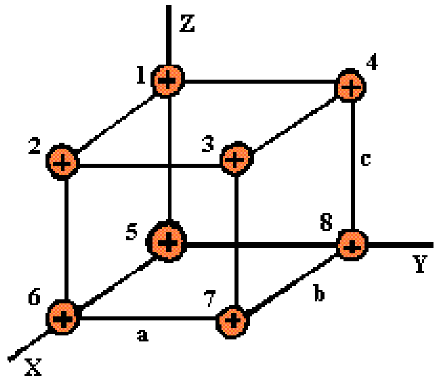
$$X = -0.4 \pm 0.69$$

$\rightarrow X_+ = 0.29$ m > 0 --> Es solución válida

$\rightarrow X_- = -1.09$ m < 0 ---> No es solución válida

$\therefore$ q_3 debe ubicarse a 29 cm a la derecha de q_1

2) Arreglo de ocho cargas.
Dado el siguiente sistema:



$a = 0.1$ [m]
$b = \sqrt{30} / 10$
$c = 0.4$
$q = 2\ \mu C$
* En el punto medio del sistema se ubica una carga de $+1\ \mu C$

Encuentre:

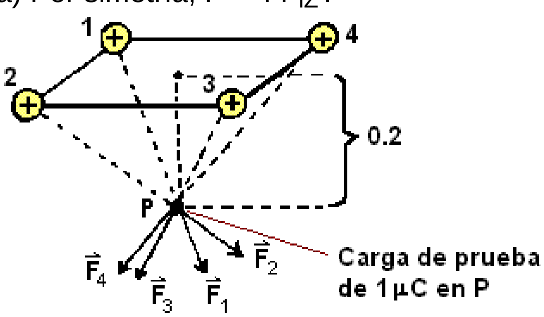
a) La fuerza generada por (q_1, q_2, q_3, q_4) sobre la carga que se ubica en el punto medio del sistema: $\vec{r} = (\,b/2,\ a/2,\ c/2\,)$

b) La fuerza neta sobre la carga ubicada en el punto medio del sistema

c) La energía potencial eléctrica almacenada por el sistema (sin considerar la carga ubicada en el centro)

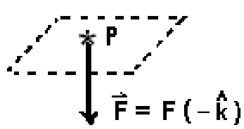
R:

a) Por simetría, $F = 4\ F_{iZ}$:



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_4$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i :$$



$$F = 4F_{1Z} = 4F_{2Z} = 4F_{3Z} = 4F_{4Z}$$

* Interacción entre q_1 y la carga de prueba:

$\vec{r}_1 = (0, 0, 0.4)$ m

$\vec{r}_P = \frac{1}{2}(\sqrt{30}/10, 0.1, 0.4) = (\sqrt{30}/20, 0.05, 0.2)$ m

$\vec{r}_{1P} = \vec{r}_P - \vec{r}_1 = (\sqrt{30}/20, 0.05, -0.2)$ m

$r_{1P} = \left(\frac{30}{400} + 0.05^2 + 0.2^2\right)^{1/2} \simeq 0.343$

$\hat{r}_{1P} = \vec{r}_{1P}/r_{1P} \simeq (0.80, 0.15, -0.58)$

$$F_1 = \frac{K\, q_1 * 10^{-6}}{r_{1P}^2} \simeq 0.153 \text{ N}$$

Luego:

$\vec{F}_1 = F_1\, \hat{r}_{1P} = 0.153*(0.80, 0.15, -0.58)$

$\vec{F}_1 = (0.122, 0.023, -0.089)$ [N]

Por lo tanto:

$|F_{1Z}| = 0.089$ N

De modo que:

$F = 4F_{1Z} = 0.356$ N

Finalmente: $\vec{F} = 0.356(-\hat{k})$ [N]

b) Por simetría, la fuerza neta generada por las cargas de abajo es:

$\vec{F} = 0.356(+\hat{k})$ [N]

Por lo tanto:

$\vec{F}_N = \vec{0}$

c) Son ocho cargas $\Rightarrow$ la sumatoria contendrá

$\binom{8}{2} = 28$ **términos**

Observemos que:

$r_{12} = r_{34} = r_{56} = r_{78} = 0.548$
$r_{13} = r_{24} = r_{57} = r_{68} = 0.557$
$r_{14} = r_{23} = r_{58} = r_{67} = 0.1$
$r_{15} = r_{26} = r_{37} = r_{48} = 0.4$
$r_{16} = r_{25} = r_{38} = r_{47} = 0.678$
$r_{17} = r_{28} = r_{35} = r_{46} = 0.686$
$r_{18} = r_{45} = r_{27} = r_{36} = 0.412$

Luego:

$$U = 4U_{12} + 4U_{13} + 4U_{14} + 4U_{15} + 4U_{16} + 4U_{17} + 4U_{18}$$
$$= 4Kq^2\left(\frac{1}{0.548} + \frac{1}{0.557} + \frac{1}{0.1} + \frac{1}{0.4} + \frac{1}{0.678} + \frac{1}{0.686} + \frac{1}{0.412}\right)$$

$U = 3.09$ J

3) Modelo de Bohr

Según Niels Bohr (1913) los átomos hidrogenoides (de un electrón) se asemejan a un modelo planetario, donde el electrón se mueve con Movimiento Circunferencial Uniforme (MCU). La fuerza centrípeta es proporcionada por la fuerza de atracción eléctrica entre el núcleo de carga +Ze y el electrón de carga -e.

Encuentre los niveles de energía de un átomo hidrogenoide, sabiendo que el momentum angular es un múltiplo de la unidad fundamental de momentum angular:

$L = n\hbar$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Js ("h barra")

h = cte de Planck

R:

Para el electrón:

$$\left.\begin{array}{r} L = n\hbar \\ \text{MCU: } L = mvr \end{array}\right\} v = \frac{n\hbar}{mr} \quad \text{(i)}$$

$$|\vec{F}_{elec}| = |\vec{F}_{cent}| \leftrightarrow \frac{KZe^2}{r^2} = \frac{m}{r}v^2 \underset{\text{(i)}}{=} \frac{m}{r}\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2$$

Luego, los radios permitidos son:

$$r = \frac{n^2}{Z}\left(\frac{\hbar^2}{mKe^2}\right) = \frac{n^2}{Z}a_o$$

Donde

$a_o = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m = Radio de Bohr
= Radio del átomo de hidrógeno en el estado fundamental

A partir de (i), y utilizando la discretización (o cuantización) de r:

$$v = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{n\hbar}{m\left(\frac{n^2\hbar^2}{ZmKe^2}\right)} = \frac{Z}{n}\left(\frac{Ke^2}{\hbar}\right) \quad \text{(ii)}$$

Finalmente:

$$E = E_K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{KZe^2}{r}$$

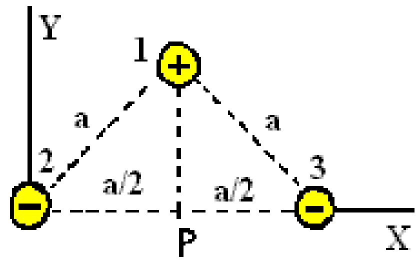
$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{ZKe^2}{n\hbar}\right)^2 - \frac{KZe^2}{\left(\frac{n^2\hbar^2}{ZmKe^2}\right)}$$

$$E = -\frac{Z^2}{n^2}\left(\frac{mK^2e^4}{2\hbar^2}\right) = -\frac{Z^2}{n^2}E_o$$

Con Eo = $2.18 \cdot 10^{-18}$ J = 13.6 eV = Primera energía de ionización del átomo de hidrógeno.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Dado el siguiente arreglo de cargas:



$a = 2$ m
$q_1 = -q_2 = -q_3 = q$

Encuentre:

a) La energía necesaria para crear el sistema

b) El punto donde debe ubicarse $q_4 = -4q$, de modo que la fuerza en P sea cero.

c) La energía necesaria para cambiar q_1 por $-q_1$

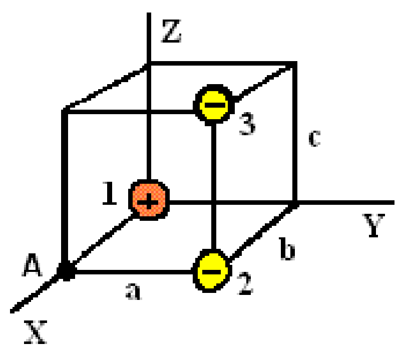
____

R: a) $U = -Kq^2 / a \approx -4.5 * 10^9 q^2$

b) Debe colocarse a una distancia $a\sqrt{3}$ arriba de P

c) $W = U_f - U_i = -3\,Kq^2 / a - (-Kq^2 / a) \approx 1.8*10^{10}\, q^2$

2) Dado el siguiente arreglo de cargas:



$q_1 = -q_2 = -q_3 = 5\ \mu C$
$a = 0.1$ m
$b = 30 /10$ m
$c = 0.4$ m

Y sabiendo que en A se encuentra una carga de prueba q_4 de -5 μC, encuentre:

a) La fuerza eléctrica sobre q_4

b) La energía almacenada por el sistema (sin considerar la carga de prueba)

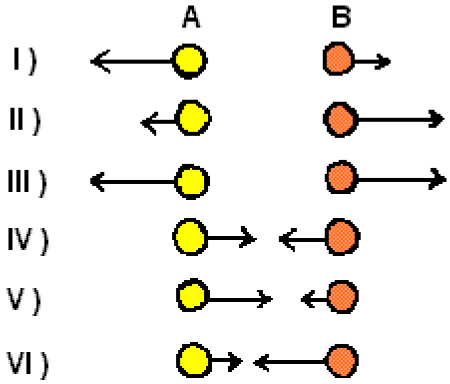
R:

$\vec{F} = (-0.75, -22.82, -1.28)$ [N]

$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -0.169$ J

3) Lógica Vectorial

Sean dos cargas tales que $q_A = -2q_B$. ¿Cuál de los siguientes diagramas representa correctamente la fuerza recibida por cada carga?



R: IV (fuerzas atractivas y se satisface la ley de acción y reacción)

CAPÍTULO 4: Campo Eléctrico

4.1 Campo Eléctrico

4.1.1 Definición de Campo Eléctrico (CE)

El CE es una alteración del espacio que puede ser percibida como una fuerza por cargas eléctricas no nulas. Luego, el CE se mapea del siguiente modo:

$\vec{E} = \vec{F}/Q$

Donde:

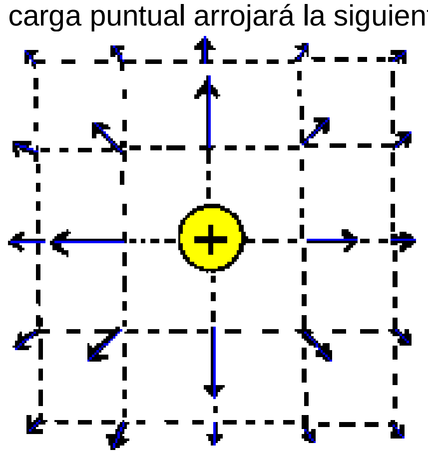
$\vec{E}$ = Campo Eléctrico en el punto $\vec{r}$ del espacio.
El CE se mide en Newton/Coulomb

q = carga de prueba (C) ubicada en el punto $\vec{r}$.
Sea positiva y de un pequeño valor

$\vec{F}$ = Fuerza percibida por la carga de prueba

4.1.2 Líneas de Campo (o de Fuerza)

El mapeo del CE generado por una carga puntual arrojará la siguiente imagen:



Se observa que la representación directa del CE para el caso más simple es muy engorrosa. Luego, es mejor utilizar la representación conocida como "Líneas de Campo", de acuerdo con las siguientes reglas:

i) Las Líneas de Campo se trazan de modo que $\vec{E}(\vec{r})$ sea tangente a la Línea de Campo que pasa por $\vec{r}$

ii) Las Líneas de Campo deben estar más separadas en aquellas regiones donde | **E**(r) | sea menor (es decir, | **E**(r) | es proporcional a la densidad de líneas de campo)

REGLAS COMPLEMENTARIAS

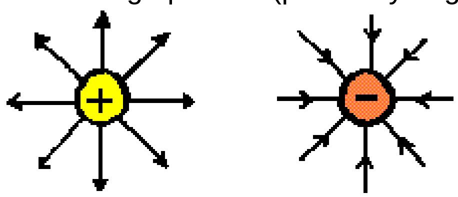
iii) Las Líneas de Campo salen de las cargas positivas (fuentes) y entran en las cargas negativas (sumideros)

iv) La fuerza que percibirá una carga q > 0 al ser colocada en $\vec{r}$ tiene las siguientes características:

- Dirección: tangente a la Línea de Campo
- Sentido: igual que el de la Línea de Campo

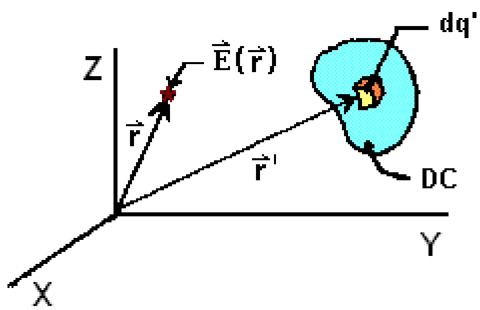
Esto se deriva de $\vec{F} = q\vec{E}$

* Luego, las Líneas de Campo para una carga puntual (positiva y negativa) serán:



4.1.3 Cálculo del CE

El CE se calcula del siguiente modo:



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{DC} \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

Definición integral de CE

Donde:

$\vec{r}$ = punto donde se mide $\vec{E}$

DC = Distribución de Carga

dq' = carga infinitesimal en la DC

En tres dimensiones:

$dq' = \rho(\vec{r}')dv'$, donde $\rho(\vec{r}')$= densidad 3D de carga eléctrica en el punto $\vec{r}'$

$\vec{r}'$= ubicación de dq'

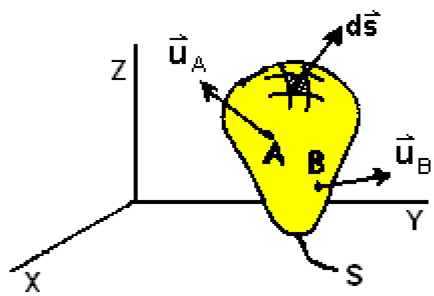
*** Casos especiales**
1D: Si la DC es unidimensional y si la densidad lineal de carga "λ" (C / m) es constante:
$dq' = \lambda\, dl'$

2D: Si la DC es bidimensional y si la densidad areal de carga "σ" (C / m^2) es constante:
$dq' = \sigma\, ds'$

3D: Si la DC es tridimensional y si la densidad volúmica de carga "ρ" (C / m^3) es constante:
$dq' = \rho\, dv'$

4.2 Ley de Gauss
4.2.1 Explicación de la Ley de Gauss
El flujo en una superficie cerrada "S" de cualquier función "$\vec{u}$" dependiente de la posición es:

$$\phi_{\vec{u}} = \oint_S \vec{u}\cdot d\vec{s}$$



Gauss descubrió que si $\vec{u}$ es el Campo Eléctrico, el flujo siempre resulta ser igual a:

$$\boxed{\phi_{\vec{E}} = Q_{enc}/\varepsilon_o}$$

Donde:
Q_{enc} = Carga encerrada por la superficie S
ε = permeabilidad eléctrica sobre S
(recordemos que $K_{el} = 1/(4\pi\, \varepsilon)$)

Luego, la Ley de Gauss puede escribirse de dos formas:
i) Forma Integral:
$\phi_{\vec{E}} = Q_{enc}/\varepsilon$
Es decir:

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{Vol(S)} dq}$$

Versión integral de la Ley de Gauss

ii) Forma Diferencial
Utilizando el Teorema de Green en tres dimensiones:

$$\phi_{\vec{E}} = \int_{Vol(S)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dv$$

$$Q_{enc} = \int_{Vol(S)} \rho\,dv$$

Es decir:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon}$$

Versión diferencial de la Ley de Gauss
(Primera Ecuación de Maxwell)

4.2.2 Superficies Gaussianas (SG)

Se define como "Superficie Gaussiana" a aquella superficie donde se calcula el flujo de $\vec{E}$ de modo que se cumplen las siguientes dos condiciones:

i) $|\vec{E}|$ es constante sobre la SG

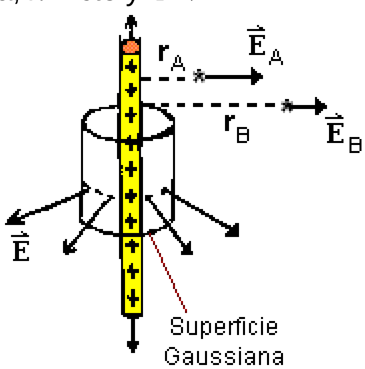
ii) $\hat{E}$ es paralelo o antiparalelo a **ds** (es decir: $\hat{E}\cdot\hat{ds} = +1$ ó -1)

4.2.3 Casos especiales de la Ley de Gauss

Los casos especiales más recurrentes son:

i) 1D: simetría cilíndrica (ej: axón neuronal)

Distribución lineal de carga, λ = cte y $l \to \infty$



$$\lambda = \Delta Q / \Delta l = \text{cte}$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}}$$

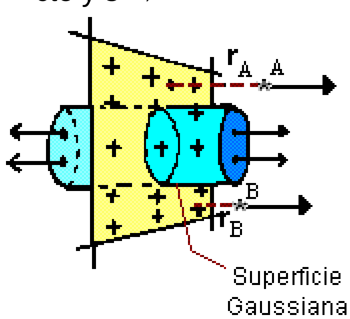
$$\hat{E} = +\hat{n}$$

Carga positiva

Nota: $[\, l \to \infty \,] \leftrightarrow [\, r << l \,]$

ii) 2D: simetría plana (ej: electrocitos de una anguila)

Distribución areal de carga, σ = cte y $s \to \infty$



$$\sigma = \Delta Q / \Delta S$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon}}$$

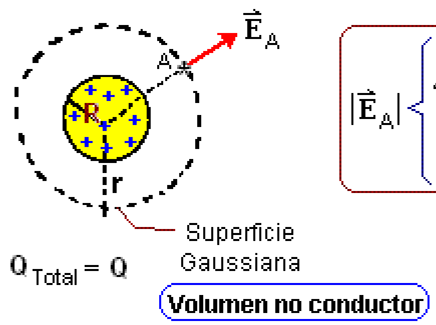
$$\hat{E} = +\hat{n}$$

Carga positiva

$$\vec{E}_A = \vec{E}_B$$

iii) 3D: Simetría esférica (ej: célula idealizada)
Distribución tridimensional de carga y ρ = cte (medio no conductor)

$\rho = \Delta Q / \Delta V = \text{cte}$



$$|\vec{E}_A| \begin{cases} \dfrac{Q\,r}{4\pi\varepsilon R^3} & \text{Si } r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & \text{Si } r > R \end{cases}$$

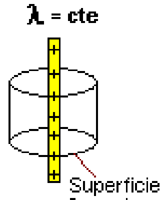
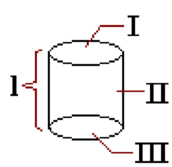
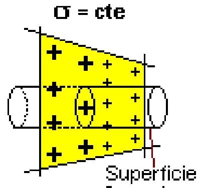
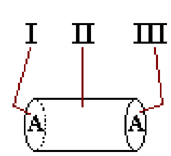
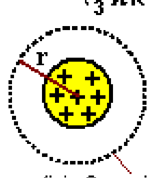
$\hat{E} = +\hat{r}$ Carga positiva

NOTA: en un sólido conductor la carga reside en la superficie (corriente eléctrica = 0 ↔ "electrostática"). Luego, para un sólido conductor:

$E = 0$ si $r < R$

$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r}$ si $r > R$

LEY DE GAUSS

CASO	SUPERFICIE GAUSSIANA	$\Phi_{\vec{E}}$	Q_{enc}	LEY DE GAUSS	$\vec{E}$ (si Q >0)
Simetría Cilíndrica λ = cte  Superficie Gaussiana		$\Phi_{\vec{E}} = \Phi_I + \Phi_{II} + \Phi_{III}$ $\Phi_I = 0 = \Phi_{III}$ $(\vec{E} \perp d\vec{s})$ $\Phi_{II} = E * 2\pi r l = \Phi_{\vec{E}}$	$\lambda\, l$	$2\pi r l E = \dfrac{\lambda\, l}{\varepsilon}$	$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,\hat{n}$
Simetría Plana σ = cte  Superficie Gaussiana		$\Phi_{\vec{E}} = \Phi_I + \Phi_{II} + \Phi_{III}$ $\Phi_I = E A = \Phi_{III}$ $\Phi_{II} = 0$ $(\vec{E} \perp d\vec{s})$ $\Phi_{\vec{E}} = 2 E A$	σA	$2 E A = \dfrac{\sigma A}{\varepsilon}$	$\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon}\,\hat{n}$
Simetría Esférica $\rho = \text{cte} = \dfrac{Q}{(\frac{4}{3}\pi R^3)}$  Superficie Gaussiana		$\Phi_{\vec{E}} = E * 4\pi r^2$	Si $r < R$: $Q_{enc} = \rho * \frac{4}{3}\pi r^3$ Si $r > R$: $Q_{enc} = Q$ (ρ = cte, es decir, volumen no conductor)	$4\pi r^2 E = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon}$	Si $r < R$: $\vec{E} = \dfrac{Q\,r}{4\pi\varepsilon R^3}\,\hat{r}$ Si $r > R$: $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\hat{r}$

SOLICITE EL MANUAL COMPLETO EN
LA BIBLIOTECA CÉSAR LEYTON DE LA
FACULTAD DE QUÍMICA Y FARMACIA COMO:
"APUNTES FISICA 2 - 001" (hay tres copias anilladas)